非紧 Riemann 流形上一类 Kazdan-Warner 型方程光滑解的存在唯一性*

邓义华
（衡阳师范学院数学与计算科学系，湖南 衡阳 421008）

摘　要：在非紧 Riemann 流形上讨论了一类 Kazdan-Warner 型方程。首先，利用穷竭法以及标准的抛物理论得到了一类带初始条件和 Neumann 边界条件的热流方程长时间解的存在唯一性。然后得到了热流方程解的一致估计并在合适的条件下得到了所讨论方程光滑解的存在唯一性。

关键词：非紧 Riemann 流形；Kazdan-Warner 型方程；热流方程；穷竭法

中图分类号：O186.16　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2010）06-0026-05

Existence and Uniqueness of Smooth Solution to a Class of Kazdan-Warner Typed Equations on Non-Compact Riemannian Manifolds

DENG Yihua
(Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: A class of Kazdan-Warner typed equations on non-compact Riemannian manifolds are discussed. Firstly, the existence and uniqueness of longtime solution to the corresponding heat equation with initial condition and Neumann boundary condition are obtained by the exhaustion method and the standard parabolic theory. And then, some uniform estimates of the solution to the heat equation are obtained and the existence and uniqueness of smooth solution to the equations discussed in this paper are gained under suitable conditions.

Key words: non-compact Riemannian manifolds; Kazdan-Warner typed equation; heat equation; exhaustion method

在文献［1］中，Kazdan 和 Warner 在紧致二维流形上讨论了如下方程

$$\Delta w + (he^v)e^w - c = 0 \tag{1}$$

解的存在性问题。随后，Kazdan 等[2]，Burago[3]，Hulin 等[4]，Rukmini[5]继续在一些非紧 Riemann 曲面上讨论了方程（1）。最近，汪悦等[6]在一类非紧高维 Riemann 流形上研究了方程

$$\Delta f + he^f - g = 0 \tag{2}$$

并在一定的条件下得到了方程（2）光滑解的存在唯一性。受以上文献的启发，本文主要在一类非紧高维 Riemann 流形 M 上讨论如下更一般的 Kazdan-Warner 型方程

$$\Delta f + h_1\lambda_1^{\alpha f} + h_2\lambda_2^{\beta f} - g = 0 \tag{3}$$

其中，λ_1，$\lambda_2>1$ 为常数，α，β 为非零常数，h_1，$h_2, g \in C^\infty(M)$。

方程（3）与 Kähler 流形上全纯向量丛中 Hermitian-Yang-Mills-Higgs 度量的存在性有密切的联系[6]。紧致 Kähler 流形上全纯向量丛中 Hermitian-Yang-Mills-Higgs 度量的存在性定理首先由 Bradlow[7]得到。最近，汪悦等[6]得到了非紧 Kähler 流形上全纯向量丛中 Hermitian-Yang-Mills-Higgs 度量的一个存在性定理。设 M 是非紧 Riemann 流形，

* 收稿日期：2009-10-09
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（09JJ6004）；湖南省教育厅青年基金资助项目（08B010）
作者简介：邓义华（1971年生），男，副教授；E-mail：dengchen4032@126.com

并且满足以下假设：

(A_1) M 具有有限体积；

(A_2) 在 M 上存在非负的穷竭函数 φ 满足 $\Delta\varphi$ 有界；

(A_3) 存在一增函数 $\alpha:[0,\infty)\to[0,\infty)$，满足 $\alpha(0)=0$，且当 $x>1$ 时，有 $\alpha(x)=x$，使得若 f 是 M 上的任一有界正函数且满足 $\Delta f\geqslant -B$，则必有 $\sup_M|f|\leqslant C(B)\alpha\left(\int_M|f|\right)$。

定理 1　设 M 是满足以上假设 (A_1) – (A_3) 的非紧 Riemann 流形，h_1，h_2，$g\in C^\infty$ (M) 且 α，$\beta\geqslant 0$，h_1，$h_2\leqslant 0$ 但其中之一不恒为零，$\sup_M(|h_1|+|h_2|+|g|)\leqslant\infty$，$\int_M g<0$，则方程 (3) 存在唯一的解 $f\in C^\infty(M)$ 满足 $\sup_M|f|<\infty$。

1　一些引理

为了证明定理 1，我们需要建立一些引理。在下文中，始终假设

$$M_a=\{x\in M\mid\varphi(x)\leqslant a\}$$

其中 φ 是假设 (A_2) 中的穷竭函数，且对于序列 $a\to\infty$ 边界 ∂M_a 都是光滑的。考虑 M_a 上带有 Neumann 边界条件的热流方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g\\ \dfrac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\partial M_a}=0,f|_{t=0}=0\end{cases}\tag{4}$$

这是一个抛物型方程，从而可以得到短时间解的存在性。设 f 是方程 (4) 的短时间解，解的存在区间为 $0\leqslant t<T$。

引理 1　当 αh_1，$\beta h_2\leqslant 0$ 时，带有 Neumann 边界条件（或 Dirichlet 边界条件）的热流方程 (4) 具有长时间解。

证明　直接计算可得

$$\begin{aligned}&\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2=\\&\Delta[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2-\\&\frac{\partial}{\partial t}[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2=\\&2|\nabla[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]|^2-\\&2(\alpha h_1\lambda_1^{\alpha f}\ln\lambda_1+\beta h_2\lambda_2^{\beta f}\ln\lambda_2)\cdot\\&[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2\end{aligned}$$

由于 αh_1，$\beta h_2\leqslant 0$，所以

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2\geqslant 0\tag{5}$$

另一方面，由于 $\dfrac{\partial}{\partial v}[\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g]^2\Big|_{\partial M_a}=0$，从而根据极大值原理可得

$$\begin{aligned}\sup_{M_a}\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|(\cdot,t)&=\sup_{M_a}|\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+\\&h_2\lambda_2^{\beta f})-g|(\cdot,t)\leqslant\\&\sup_{M_a}(|h_1|+|h_2|+|g|)\leqslant\\&\sup_{M}(|h_1|+|h_2|+|g|)\end{aligned}\tag{6}$$

由 (6) 式可知 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|$ 在 $0\leqslant t<T$ 上关于 t 是一致有界的。容易验证，当 $t\to T$ 时，$f(\cdot,t)$ 是 C^0 收敛到连续函数 $f(\cdot,T)$。再由 (6) 式可得

$$\sup_{M_a}|\Delta f|(\cdot,t)\leqslant C_1\lambda_1^{C_2T}+\overline{C_1}\lambda_2^{\overline{C_2}T}\tag{7}$$

其中，$C_1,C_2,\overline{C_1},\overline{C_2}$ 是仅依赖于 $\sup_M(|h_1|+|h_2|+|g|)$ 的常数。由带边界条件的椭圆估计知道 $f(\cdot,t)$ 是 C^1 一致有界，并且在 $L_2^p(M_a)$ 中关于 $0\leqslant t<T$ 是一致有界（对任意 $1<p<\infty$）的。运用 Hamilton[8] 的方法，可得 $f(\cdot,t)\to f(\cdot,T)$ 为 C^∞ 收敛，从而解可连续地越过 T 时刻。于是引理 1 证明完毕。

引理 2[9]　设 φ 是假设 (A_2) 中的函数，并且 $\Delta\varphi\leqslant C_0$。如果 u 是定义在 $M_a\times[0,T]$ 的函数满足

$$\begin{cases}\left(\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u\geqslant 0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

并且 $\sup_{M_a}u<C_1$，则 $u(x,t)\leqslant\dfrac{C_1}{a}(\varphi(x)+C_0t)$。

设 $f_a(\cdot,t)\in C^\infty(M_a\times[0,+\infty))$ 是热流方程 (4) 的长时间解。下面我们证明 M 上热流方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=\Delta f+h_1\lambda_1^{\alpha f}+h_2\lambda_2^{\beta f}-g\\ f|_{t=0}=0\end{cases}\tag{8}$$

长时间解的存在唯一性。由 (6) 式可知 $\sup_{M_a}\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|(\cdot,t)\leqslant\sup_M(|h_1|+|h_2|+|g|)$，所以在有限时间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上有 $\sup_{M_a\times[0,T]}|f(\cdot,t)|\leqslant\sup_M(|h_1|+|h_2|+|g|)T$。设 $Z\subset M$ 是一紧集，选取 a_0 充分大，使得 $Z\subset M_{a_0}$。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)(f_{a_2}-f_{a_1})^2=2(f_{a_2}-f_{a_1})\cdot\\&\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)(f_{a_2}-f_{a_1})+2|\nabla(f_{a_2}-f_{a_1})|^2=\\&2|\nabla(f_{a_2}-f_{a_1})|^2-2(f_{a_2}-f_{a_1})\cdot\\&[(h_1\lambda_1^{\alpha f_{a_2}}+h_2\lambda_2^{\beta f_{a_2}})-(h_1\lambda_1^{\alpha f_{a_1}}+h_2\lambda_2^{\beta f_{a_1}})]\end{aligned}\tag{9}$$

考察函数 $F(x)=h_1\lambda_1^{\alpha x}+h_2\lambda_2^{\beta x}$，由于 $F'(x)=$

$h_1\alpha\lambda_1^{\alpha x}\ln\lambda_1 + h_2\beta\lambda_2^{\beta x}\ln\lambda_2 \leqslant 0$。所以，当 $\alpha h_1,\beta h_2 \leqslant 0$ 时 $F(x)$ 单调递减。从而由（9）式可得

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)(f_{a_2} - f_{a_1})^2 \geqslant 0 \tag{10}$$

由引理2，可知对于 $1 \leqslant a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$，在 $M_{a_0} \times [0,T]$ 上有

$$(f_{a_2} - f_{a_1})^2 \leqslant \frac{C_1}{a}(a_0 + C_0 T) \tag{11}$$

所以对于固定的紧集 $Z \times [0,T]$，当 $a \to \infty$ 时，f_a 是一 Cauchy 序列。类似于文献［6］中命题2.3的讨论，我们有

引理3 设 M 是满足假设（A_1）－（A_3）的非紧 Riemann 流形。若 $\sup_M(|h_1|+|h_2|+|g|) < \infty$ 和 $\alpha h_1,\beta h_2 \leqslant 0$ 成立，则热流方程（8）有唯一的长时间解 f，且 f 满足

$$\sup_M|\Delta f + h_1\lambda_1^{\alpha f} + h_2\lambda_2^{\beta f} - g|(\cdot,t) \leqslant \sup_M(|h_1| + |h_2 + |g|) \tag{12}$$

类似于文献［6］，下面对热流方程（8）的解 $f(\cdot,t)$ 作一致的 C^0 先验估计。由于 $\lambda_1,\lambda_2 > 1$ 并且 $\alpha h_1,\beta h_2 \leqslant 0$，所以

$$\mathrm{e}^{-f}(\mathrm{e}^{2f} - 1)(\lambda_1^{\alpha f} - 1)h_1 \leqslant 0,$$
$$\mathrm{e}^{-f}(\mathrm{e}^{2f} - 1)(\lambda_2^{\beta f} - 1)h_2 \leqslant 0$$

于是，

$$\begin{aligned}\Delta\ln(\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}) &= \frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}}\Delta f + \nabla\left(\frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}}\right)\cdot\nabla f = \\ &\frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}}[\Delta f + h_1\lambda_1^{\alpha f} + h_2\lambda_2^{\beta f} - g] - \\ &\frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}}(\lambda_1^{\alpha f} - 1)h_1 - \frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}}(\lambda_2^{\beta f} - 1)h_2 + \\ &(g - h_1 - h_2)\frac{\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f}}{\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}} + \\ &\frac{(\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f})^2 - (\mathrm{e}^f - \mathrm{e}^{-f})^2}{(\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f})^2}|\nabla f|^2 \geqslant \\ &-2\sup_M(|g| + |h_1| + |h_2|)\end{aligned}$$

又因为 $|f| \leqslant \ln(\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}) \leqslant \ln 2\mathrm{e}^{|f|} = |f| + \ln 2$，所以根据假设（$A_3$），我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_M|f| \leqslant \sup_M\ln(\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f}) \leqslant \\ &C\alpha\left(\int_M\ln(\mathrm{e}^f + \mathrm{e}^{-f})\right) \leqslant C\alpha\left(\int_M|f| + \ln 2\right) \leqslant \\ &C_3\int_M|f| + C_4\end{aligned} \tag{13}$$

其中正数 C_3,C_4 仅依赖于 $\sup_M(|h_1| + |h_2| + |g|)$ 和 $\mathrm{Vol}(M)$。

引理4 设 f 是方程（8）的解，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M\left(fg + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \left(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\lambda_1^{\alpha f} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\lambda_2^{\beta f}\right) + \left(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\right)\right) = -\int_M[\Delta f + h_1\lambda_1^{\alpha f} + h_2\lambda_2^{\beta f} - g]^2 \tag{14}$$

证明 由文献［6］可知

$$\int_M \mathrm{div}(f(\cdot,t_2)\nabla f(\cdot,t_1)) = 0 \tag{15}$$

$$|f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)| \leqslant C_5(t - t_0) \tag{16}$$

$$\lim_{t\to t_0}\int_M|\Delta(f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0))| = 0 \tag{17}$$

对任意的 $t_0 \in [0,+\infty)$，由（15）式、（16）式与（17）式得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_M\left(fg + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \left(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\lambda_1^{\alpha f} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\lambda_2^{\beta f}\right) + \left(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\right)\right)\Bigg|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\cdot \\ &\left[\int_M(f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0))g - \frac{1}{2}\int_M(f(\cdot,t)\Delta f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0)\Delta f(\cdot,t_0))\right] - \\ &\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\int_M\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}(\lambda_1^{\alpha f(\cdot,t)} - \lambda_1^{\alpha f(\cdot,t_0)}) - \\ &\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\int_M\frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}(\lambda_2^{\beta f(\cdot,t)} - \lambda_2^{\beta f(\cdot,t_0)}) = \\ &\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\left[\int_M(f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0))(g - \Delta f(\cdot,t_0)) - \frac{1}{2}\int_M(f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0))\Delta(f(\cdot,t) - f(\cdot,t_0))\right] - \\ &\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\int_M\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}(\lambda_1^{\alpha f(\cdot,t)} - \lambda_1^{\alpha f(\cdot,t_0)}) - \\ &\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t - t_0}\int_M\frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}(\lambda_2^{\beta f(\cdot,t)} - \lambda_2^{\beta f(\cdot,t_0)}) = \\ &\int_M(g - \Delta f(\cdot,t_0))\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} - \int_M h_1\lambda_1^{\alpha f(\cdot,t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} - \int_M h_2\lambda_2^{\beta f(\cdot,t_0)}\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = \\ &-\int_M[\Delta f(\cdot,t_0) + h_1\lambda_1^{\alpha f(\cdot,t_0)} + h_2\lambda_2^{\beta f(\cdot,t_0)} - g]^2\end{aligned} \tag{18}$$

于是，引理4证明完毕。

引理5 设 f 是由上面构造的方程（8）的解，则 $\int_M f(\cdot,t)$ 关于 t 必定是一致有界的。

证明 假设结论不成立，则 $\limsup_{t\to+\infty}\|f(t)\|_1 = +\infty$。令 $\tau_i = \|f(t_i)\|_1 < +\infty$ 且 $u_i = \tau_i^{-1}f(t_i) \in C^\infty(M)$。由（13）式可得 $\|u_i\|_1 = 1$，$\|u_i\|_\infty \leqslant C_6$。根据引理4及 $f|_{t=0} = 0$ 可知

$$\int_M\left(\tau_i u_i g + \frac{1}{2}\tau_i^2|\nabla u_i|^2 - \left(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\mathrm{e}^{\alpha\tau_i u_i} + \right.\right.$$

$$\frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}e^{\beta\tau_i u_i}\Big) + \Big(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\Big)\Big) \leqslant 0 \qquad (19)$$

根据（19）式及 $\alpha h_1, \beta h_2 \leqslant 0$ 得

$$\int_M\Big(\tau_i u_i g + \frac{1}{2}\tau_i^2|\nabla u_i|^2 + \Big(\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} + \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\Big)\Big) \leqslant 0$$

于是

$$\lim_{i\to+\infty}\int_M|\nabla u_i|^2 = 0$$

通过取一子列，u_i 在 L_1^2 中弱收敛于 u_∞，并且 u_∞ 几乎处处是常数。按照文献［6］中（2.21）式同样的证明过程，可得 $u_\infty = C^* \neq 0\ a.e.$，于是 u_∞ 是非平凡的。

假设 $C^* > 0$。则对任意 $0 < \varepsilon < C^*$，取非负光滑函数 $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$\zeta(x) = \begin{cases}1, & x \geqslant C^* \\ 0, & x \leqslant \varepsilon\end{cases}$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2 > 1$，$\alpha, \beta \geqslant 0, h_1, h_2 \leqslant 0$ 且其中之一不恒为零，因此可以选取 $\tau_0 > \frac{2}{\varepsilon}$，使得

$$-\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau_0\varepsilon}}{\tau_0^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau_0\varepsilon}}{\tau_0^2} > \sup(\zeta)$$

于是对任意 $x > \varepsilon$ 和 $\tau > \tau_0$，有

$$\zeta(x) \leqslant \sup(\zeta) < -\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau_0\varepsilon}}{\tau_0^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau_0\varepsilon}}{\tau_0^2} < -\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau\varepsilon}}{\tau^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau\varepsilon}}{\tau^2} < -\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau x}}{\tau^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau x}}{\tau^2} \qquad (20)$$

另一方面，对 $x \leqslant \varepsilon$，（20）式显然成立。于是对充分大的 i，有

$$\zeta(u_i) < -\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau_i u_i}}{\tau_i^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau_i u_i}}{\tau_i^2} \qquad (21)$$

从而由（19）和（21）得

$$0 \leqslant \int_M\zeta(u_i) < \int_M -\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1}\frac{e^{\alpha\tau_i u_i}}{\tau_i^2} - \frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}\frac{e^{\beta\tau_i u_i}}{\tau_i^2} \leqslant \frac{-\int_M\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} - \int_M\frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}}{\tau_i^2} - \frac{\int_M\tau_i u_i g}{\tau_i^2} \qquad (22)$$

由于 u_i 在 L_1^2 中弱收敛于 C^*，由假设 $C^* > \varepsilon$ 以及极限的保号性，可得存在自然数 N，当 $i > N$ 时都有 $u_i > \varepsilon$。于是由 $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的取法知，当 $i > N$ 时都有 $\zeta(u_i) > 0$。另一方面，由（22）式得 $\lim_{i\to\infty}\int_M\zeta(u_i) = 0$，这与 $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及当 $i > N$ 时都有 $\zeta(u_i) > 0$ 矛盾。从而只能是 $u_\infty = C^* < 0$。但是由（19）式及 $\alpha h_1, \beta h_2 \leqslant 0$ 得

$$\int_M C^* g = \int_M u_\infty g = \lim_{i\to+\infty}\int_M u_i g \leqslant \lim_{i\to+\infty}\frac{-\int_M\frac{h_1}{\alpha\ln\lambda_1} - \int_M\frac{h_2}{\beta\ln\lambda_2}}{\tau_i} = 0$$

这与假设 $\int_M g < 0$ 矛盾。所以 $\int_M f(\cdot,t)$ 对 t 必须是一致有界的。引理 5 证明完毕。

2　定理 1 的证明

由引理 5 和（13）式可知存在一正常数 $C_7 > 0$，使得对所有的 t，有

$$\sup_M|f(\cdot,t)| \leqslant C_7$$

再由（12）式和（14）式，可得到 Δf 和 $\int_M|\nabla f|^2$ 是一致有界的。从而可以选取子列 $t_i \to +\infty$，使得 $f(\cdot,t_i) \to f_\infty$ 在 $L_{2,loc}^p$ 中弱收敛，且

$$\int_M(\Delta f + h_1\lambda_1^{\alpha f} + h_2\lambda_2^{\beta f} - g)^2(\cdot,t_i) \to 0$$

于是，由椭圆正则性理论可知 f_∞ 是方程（3）的光滑解。定理 1 证明完毕。

参考文献：

［1］ KAZDAN J L, WARNER F W. Curvature functions for compact 2-manifolds[J]. Ann of Math, 1974, 99: 14 - 47.

［2］ KAZDAN J L, WARNER F W. Curvature functions for open 2-manifolds[J]. Ann of Math, 1974, 99: 203 - 219.

［3］ BURAGO Y D. Existence on a non-compact surface of complete metrics with given curvature[J]. Ukr Geom SB, 1982, 25:8 - 11.

［4］ HULIN D, TROYANOV M. Prescribing curvature on open surface[J]. Math Ann, 1992, 283:277 - 315.

［5］ RUKMINI D. A complete conformal metric of preassigned negative Gaussian curvature for a punctured hyperbolic Riemannian surface[J]. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 2004, 114:141 - 151.

［6］ WANG Y, ZHANG X. A class of Kazdan-Warner typed equations on non-compact Riemannian manifolds[J]. Science in China, Series A, 2008, 51(6): 1111 - 1118.

［7］ BRADLOW S B. Vortices in holomorphic line bundles over closed Kähler manifolds[J]. Commun Math Phys, 1990, 135: 1 - 17.

［8］ HAMILTON R S. Harmonic maps of manifolds with boundary[M]//Lecture Notes in Math, Vol. 471, New York: Springer, 1975.

[9] SIMPSON C T. Constructing variations of Hodge structures using Yang-Mills connections and applications to uniformization[J]. J Amer Math Soc, 1988, 1: 867 - 918.

[10] NI L. Poisson equation and Hermitian-Einstein metrics on holomorphic vector bundles over complete noncompact Kähler manifolds[J]. Indiana Univ Math J, 2002, 3: 679 - 704.

[11] MA L. Gradient estimates for a simple equation on complete non-compact Riemannian manifolds[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 241: 374 - 382.

[12] MA L, LI C, ZHAO L. Monotone solutions to a class of elliptic and diffusion equations[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, 6(1): 237 - 246.

(上接第25页)

参考文献:

[1] WAHBA G. Spline models for observational data[J]. Soc Ind Appl Math, 1990.

[2] GUAN L T, LIU B. Surface design by natural splines over refined grid points[J]. J Comp Anal and Appl, 2004, 163(1):107 - 115.

[3] LAI M J. Multivariate splines for data fitting and approximation, Approximation Theory XII[M]. San Antonio, 2007, edited by Neamtu M and Schumaker L L, Brentwood :Nashboro Press, 2008: 210 - 228.

[4] LAI M J, SCHUMAKER L L. Spline functions over triangulations[M]. London: Cambridge University Press, 2007.

[5] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论[M]. 北京:科学出版社, 2008.

[6] BILLINGS S D, NEWSAM G N, BEATSON R K. Smooth fitting of geophysical data using continuous global surfaces [J]. Geophysics, 2002, 67 (6): 1810 - 1822.

[7] 李岳生, 胡日章. 多元散乱数据的样条插值法[J]. 高等学校计算数学学报, 1990, 3: 215 - 226.

[8] 胡日章. 矩形域上散乱数据的离散边界条件光顺逼近[J]. 中山大学学报:自然科学版, 1990, 29(4): 17 - 22.

[9] 韩国强. 矩形域上散乱数据样条光顺法[J]. 华南理工大学学报:自然科学版, 1993, 21(4): 102 - 109.

[10] GUAN L T. Bivariate polynomial natural spline interpolation algorithms with local basis for scattered data[J]. J Comp Anal and Appl, 2003, 1: 77 - 101.

[11] 关履泰,许伟志,朱庆勇. 一种散乱点双三次多项式自然样条插值[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2008, 47(5): 1 - 4.

[12] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. SIAM J Sci Stat Comput, 1986, 7(3): 856 - 869.